Problema

In un semicerchio di centro O, il cui diametro $\overline{AB} = 2r$, è inscritto il quadrilatero ABCD in modo che l'angolo $C\hat{O}D$ abbia per misura 2α e, dopo aver indicato con x la misura dell'angolo $B\hat{A}D$ si prolungano i lati $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ fino a incontrarsi nel punto F

1) Si esprimano in funzione di r, α e x le misure di $\overline{AF}$ e $\overline{BF}$
2) Si dimostri che il triangolo $\widehat{CFD}$ è simile al triangolo ABF e che il rapporto tra l'area del triangolo CFD e quella di $\widehat{ABF}$ è $\operatorname{sen}^2\alpha$
3) Nell'ipotesi che α sia una costante nota si determini l'angolo x in modo che l'area del triangolo $\widehat{CFD}$ sia uguale a $2kr^2$ $(k>0)$

Problema

Si consideri l'equazione di 2° grado in x

1) $$x^2 - 2x\cos\alpha + (2-\sqrt{3})(1-4\operatorname{sen}^2\alpha) = 0$$

dove α è un angolo noto $0 \le \alpha \le 2\pi$

I°) Dimostrare che questa equazione qualunque sia α ha sempre 2 radici reali. Studiare al variare di α il segno delle radici della 1).
Determinare α in modo che una delle radici sia nulla e calcolare in questo caso l'altra radice

II) mostrare che le radici della 1 sono legate da una relazione indipendente da α, $[\, x_1x_2 - (2-\sqrt{3})(x_1+x_2)^2 + 3(2-\sqrt{3}) = 0 \,]$ R:

III) Sia un angolo $XOY = \frac{\pi}{6}$. Supponendo che α sia scelto in modo che le radici x_1 e x_2 della 1 siano > 0, si fissino i punti A e B rispettivamente su OX e su OY, tali che $\overline{OA} = x_1$ e $\overline{OB} = x_2$

Calcolare $\overline{AB}$. $(= \sqrt{3})$ R: